KEGELSCHNITTE IN PROJEKTIVEN EBENEN, INSBESONDERE IN MOUFANGEBENEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Wolfgang Krüger

aus Tauer, Krs. Cottbus

Frankfurt/M. 1971

1970

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt. Ein Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der Senckenbergischen Bibliothek der Universität vor.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Prof. Dr. G. Schneider

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. R. Moufang

Zweiter Berichterstatter: Doz. Dr. G. Burde

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 2. 1970

E. BERZ hat in [1] die bekannte Steinersche Erzeugung der Kegelschnitte auf beliebige Desarguessche Ebenen übertragen.

In dieser Arbeit wird in einer beliebigen projektiven Ebene der Kegelschnitt folgendermaßen definiert : A,B,C,D seien vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind; die Menge der Schnittpunkte zugeordneter Geraden bezüglich der Projektivität $[A,BC,D][D,AC,B]$[1] ist der Kegelschnitt $\langle A,B,C;D\rangle$. In einer Desarguesschen Ebene ist jeder keine Gerade enthaltende Steinersche Kegelschnitt ein Kegelschnitt in eben definiertem Sinne.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Kegelschnitten in Moufangebenen.

In dem 1. Kapitel werden einige Aussagen über Kegelschnitte gewonnen, die in allen projektiven Ebenen richtig sind. Sind A,B, C,E,F fünf Punkte, von denen keine drei kollinear sind, so gibt es höchstens einen Kegelschnitt $\langle A,B,C;D\rangle$, der E und F enthält. Legt man den auf D,A,B,C bezogenen Ternärkörper zugrunde, so ist $\langle A,B,C;D\rangle \setminus \{A,B\} = \{P(x,y) \mid y\cdot x = 1\}$, wobei $T(y,x,o) = y\cdot x$ gesetzt wird und T die ternäre Verknüpfung im Ternärkörper ist.

Kapitel 2 befaßt sich kurz mit Kegelschnitten in Anti-Fano-Ebenen. Eine projektive Ebene ist genau dann Anti-Fano-Ebene, wenn $\langle A,B,C;D\rangle = \langle A,C,B;D\rangle$ für alle Kegelschnitte gilt. In einer Anti-Fano-Ebene ist $\langle A,B,C;D\rangle = \langle A',B',C';D\rangle$, falls $\{A,B,C\} = \{A',B',C'\}$.

In dem 3. Kapitel „Kegelschnitte in Moufangebenen" werden zunächst einige Lemmata über Alternativkörper hergeleitet, die später zusammen mit der erwähnten Koordinatendarstellung des Kegelschnittes zum Beweis von Sätzen benötigt werden, welche sich auf den Schnitt von Gerade und Kegelschnitt und auf den Schnitt von zwei Kegelschnitten beziehen :

Eine Gleichung $ax - xb = d$ mit $d \neq o$ hat in einem Alternativkörper entweder keine oder genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Daraus ergibt sich mittelbar, daß in einer Moufangebene eine Gerade mit einem Kegelschnitt entweder keinen oder genau

---

1) Zur Schreibweise : $[A,\gamma,B]$ sei die Perspektivität von dem Büschel in A auf das Büschel in B von der Achse γ $(A,B \notin \gamma)$ aus und $[A_1,\gamma_1,B_1] \ldots [A_n,\gamma_n,B_n]$ die Projektivität, die durch Hintereinanderausführung dieser n Perspektivitäten entsteht.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545303_0056

einen Punkt oder genau zwei oder unendlich viele Punkte gemeinsam hat. Wenn in dem Koordinatenalternativkörper der Ebene jede Gleichung $x^2 + ax + b = o$ wenigstens eine Lösung hat, dann schneidet in der Ebene jede Gerade jeden Kegelschnitt. Da in der Cayley-Dickson-Algebra über den reellen Zahlen jede quadratische Gleichung lösbar ist, existiert also eine echte Moufangebene, in der jede Gerade mit einem vorgegebenen Kegelschnitt wenigstens einen Punkt gemeinsam hat. In jeder Moufangebene enthält ein Kegelschnitt wenigstens drei Punkte, die die Eigenschaft haben, daß jede Gerade durch sie den Kegelschnitt in höchstens zwei Punkten schneidet; sie werden in dieser Arbeit als Zentrumspunkte des Kegelschnittes bezeichnet. Durch einen Zentrumspunkt eines Kegelschnittes geht genau eine Gerade (Tangente) , die nur diesen einen Kegelschnittpunkt enthält, und durch einen Nichtzentrumspunkt wenigstens eine Gerade, die unendlich viele Punkte mit dem Kegelschnitt gemeinsam hat. Da in einem Alternativkörper jedes nicht im Zentrum liegende Element unendlich viele Konjugierte hat, gehen durch jeden Nichtzentrumspunkt unendlich viele Geraden, die nicht genau zwei Punkte des Kegelschnittes enthalten. Zwei Kegelschnitte einer Moufangebene, die sich in zwei Punkten schneiden, die Zentrumspunkte von beiden sind, und deren Tangenten in diesen beiden Punkten übereinstimmen, haben entweder genau zwei oder unendlich viele Punkte gemeinsam, ohne identisch zu sein, oder sie fallen zusammen. Die Behauptung folgt im wesentlichen aus der Tatsache, daß in einem unendlichen Alternativkörper eine Gleichung $ax - xb = o$ entweder genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

Eine Reihe bekannter klassischer Kegelschnittsätze kann auf Moufangebenen übertragen werden, indem man fordert, daß alle oder einige Kegelschnittpunkte, die in den Sätzen als Variablen auftreten, nur Zentrumspunkte sein dürfen :

(1) Genau dann, wenn A',B',C' paarweise verschiedene Zentrumspunkte von $\langle A,B,C;D\rangle$ sind, gibt es einen Punkt D', so daß $\langle A,B,C;D\rangle = \langle A',B',C';D'\rangle$ ist. - Dieser Satz besagt im wesentlichen, daß je zwei Zentrumspunkte eines Kegelschnittes - und nur solche - als Träger projektiver Geradenbüschel gewählt werden können, die den gegebenen Kegelschnitt erzeugen.

(2) In einer Moufangebene sei $M = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ eine Menge von fünf Punkten, von denen keine drei kollinear sind; zu

je drei Punkten A_i, A_j, A_k aus M gibt es genau einen Kegelschnitt, der M enthält und A_i, A_j, A_k als Zentrumspunkte hat.

(3) Auf einem Kegelschnitt seien A,B,C drei verschiedene Zentrumspunkte und A',B',C' drei verschiedene andere Punkte, von denen wenigstens einer Nichtzentrumspunkt ist; dann ist das Sechseck AB'CA'BC' ein Pascalsches Sechseck.

(4) In einer Moufangebene mit Fano-Eigenschaft seien A und B zwei Zentrumspunkte eines Kegelschnittes und D der Schnittpunkt der Tangenten in A und B. Es gibt dann eine nicht-identische involutorische (D,AB)-Homologie, die den Kegelschnitt auf sich abbildet.

In [1] oder [3] wurden (1)-(3) bereits für den Fall einer Desarguesschen Ebene verifiziert.

Es werde noch erwähnt, daß es in einer Moufangebene zu zwei Kegelschnitten stets eine Kollineation gibt, die den einen in den anderen überführt.

In einem Anhang werden einige Aussagen über Kegelschnitte zusammengestellt, die in allen Anti-Fano-Ebenen und Moufangebenen richtig sind, also in allen projektiven Ebenen, in denen der Satz vom vollständigen Viereck gilt. In solchen Ebenen geht durch fünf Punkte, von denen keine drei kollinear sind, wenigstens ein Kegelschnitt.

L i t e r a t u r

[1] BERZ, E. : Kegelschnitte in Desarguesschen Ebenen. Math.Z. 78, 55-88 (1962).

[2] PICKERT, G. : Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[3] SEGRE, B. : Lectures on modern Geometry. Rom: Edizioni Cremonese 1961.

Lebenslauf

Geboren wurde ich am 10. Dezember 1932 in Tauer, Krs. Cottbus, als Sohn des Forstangestellten Martin Krüger und seiner Ehefrau Marie, geb. Krüger.

Von 1939-1943 besuchte ich die Volksschule in Tauer, von 1943-1945 das humanistische Friedrich-Wilhelm-Gymnasium in Cottbus und anschließend bis 1952 die VI.Oberschule in Cottbus, an der ich am 6. Juni 1952 die Reifeprüfung ablegte.

Ich studierte Mathematik vom Herbstsemester 1952 bis einschließlich Frühjahrssemester 1956 an der Karl-Marx-Universität Leipzig. Dort hörte ich Vorlesungen bei den Professoren Schnee, Salié, Beckert, Kähler. Ich beendete in Leipzig das Studium mit der Universitätsabschlußprüfung für die Lehrbefähigung an Institutionen der Erwachsenenbildung.

Anschließend war ich als Lehrer an der Arbeiter-und -Bauern-Fakultät der Bergakademie Freiberg/Sachsen, als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Fernstudium derselben Akademie und als Angestellter bei der Lebensversicherungs-AG in Stuttgart tätig.

Vom Wintersemester 1959/60 bis einschließlich Sommersemester 1965 studierte ich Mathematik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt (Main). Im November 1964 legte ich die Diplomprüfung für Mathematiker ab. Meine Lehrer waren in Frankfurt Frau Prof.Dr.Moufang, Herr Prof.Dr.Baer, Herr Prof.Dr.Franz, Herr Prof.Dr.Dembowski.

Seit dem 15. Mai 1965 war ich Verwalter einer Assistentenstelle, technischer Assistent und wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar der Frankfurter Universität.

Die vorliegende Dissertation fertigte ich auf Anregung von Frau Prof.Dr.Moufang an.

Allen meinen akademischen Lehrern, besonders Frau Prof.Dr. Moufang, möchte ich auf diesem Wege für die mir zuteil gewordene Förderung meinen Dank aussprechen.